

1

ביה"ס למדעי המחשב ומתמטיקה, תשנ"ט. 07.02.99  
מונחים אלגבריים. סמסטר א', מועד א'.  
שם המרצה: ד"ר ג. מוזניצ'וק.  
משך המבחן: 2.5 שעות.

אפשר להשתמש רק דף נוסחאות אחד מגודל A4. אסור להשתמש בכל סוגים של מחשיבוניס.

חלק א': בחלק זה יש לכתוב במחברת תשובות מלאות על כל השאלות.

### 15.1 נקודות

יהי  $R$  שדה כלשהו. הוכח שקבוצה  $R \setminus \{-1\}$  היא חבורה ביחס לפעולה  $x * y = x + y + x \cdot y$ . כאשר  $+$ , הן פעולות חיבור וכפל בשדה  $R$ .

### 15.2 נקודות

תהי  $S \subseteq G$  תת-קבוצה כלשהי של חבורה  $G$ .  
א. הוכח שיחס בינרי  $\rho_S = \{(x, y) | xy^{-1} \in S\}$  יהיה יחס שקילות אם ורק אם  $S \leq G$ .  
ב. מצא את מחלקות השקילות של  $\rho_S$  במקרה  $S \leq G$ .

### 20.3 נקודות

יהי  $R$  שדה כלשהו. הוכח שאם לפחות אחד משני פולינומים  $a(x), b(x) \in R[x]$  שונה מ-0, אז קיים פולינום  $d(x) \in R[x]$  שמקיים את התנאים הבאים:  
א.  $d(x)$  מחלק משותף של  $a(x), b(x)$ .  
ב.  $d(x)$  מתחלק בכל מחלק משותף  $e(x)$  של הפולינומים  $a(x), b(x)$ .

2

חלק ב': החלק זה יש לכתוב 5 ממוך 6 שאלות.

10.4 נקודות.

שתי תמורות של הקבוצה  $Z_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$  מוגדרות ע"י הנוסחאות

הבאות:  $x \in Z_7$ ,  $g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2x+1}, & x \neq 3 \\ 4, & x = 3 \end{cases}$ ,  $f = (1,2,3)(0,6)$  (הפעולות מתבצעות ב- $Z_7$ ).

א. חשב את $f^{-2}g$ :	(1,4,6,5,0)
ב. פרק את $f^{-2}g$ למכפלה של מחזורים זרים:	
ג. מצא סדר של $f^{-2}g$ :	
ד. פרק את $f^{-2}g$ למכפלה של חילופים:	

10.5 נקודות.

חשב את המחלק המשותף הגדול ביותר של הפולינומים הבאים:

$a(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \in Z_5[x]$ ,  $b(x) = x^3 + x^2 - x + 2 \in Z_5[x]$

$\gcd(a(x), b(x)) =$	$\gcd(a(x), b(x)) =$
----------------------	----------------------

10.6 נקודות.

יהי  $R$  חוג כלשהו, אז:

לא	כן	
	<input checked="" type="checkbox"/>	א. אם $r \in R$ הפיך אז הוא אינו מחלק-אפס.
<input checked="" type="checkbox"/>		ב. לכל פולינום פריק יש שורש אחד לפחות.
	<input checked="" type="checkbox"/>	ג. אם $r \in R$ מחלק אפס אז גם $r^2$ מחלק אפס.
<input checked="" type="checkbox"/>		ד. פולינום $f(x) \in R[x]$ יהיה הפיך אם ורק אם $\deg(f(x)) = 0 \wedge f(x) \neq 0$ .

{1, 2, 4, 5, 7, 8}

10.7 נקודות.

מספר האיברים בחבורה הכיפולית  $U$ , בעלי סדר 3 שווה ל:

- א. 2
- ב. 2
- ג. 0
- ד. 1

ה. אף אחת מהתשובות האחרות אינן נכונות.

8. 10 נקודות.

נתונה מערכת משוואות שהמקדמים שלה שייכים לשדה  $Z_5$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

אזי

- א. לממ"ל יש פתרון כללי אם משתנה חופשי אחד.
- ב. לממ"ל יש פתרון יחיד.
- ג. לממ"ל יש פתרון כללי אם 3 משתנים חופשיים.
- ד. לממ"ל יש פתרון כללי אם 2 משתנים חופשיים.
- ה. לממ"ל אין פתרונות.

9. 10 נקודות.

נתונה קבוצה  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  של 4 מטריצות ישרוניות

שייכים לשדה  $Z_2$ . אשר או סתור.

לא	כן	
	✓	א. סגורה כלפי כפל מטריצות.
✓		ב. כל מטריצה $A \in S$ מקיימת $A = A^{-1}$ .
✓		ג. $S$ חבורה ביחס לכפל של מטריצות.
	✓	ד. סגורה כלפי חיבור מטריצות.

בהצלחה!

מבית  
מבית  
מבית